Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo Científico
y Estadística

Nombre: *Prof. Hugo Montesinos*
Carné: *Clave, guía de solución*
Sección: *1 y 2 (sirve para todas)*

Probabilidades para Ingenieros (CO3121)
Septiembre-Diciembre 2010
E2: 40%, Duración: 1 hora y 50 minutos.

Conteste cada pregunta en el espacio destinado para ello, las violaciones serán penalizadas. Recuerde que el examen es individual. No se permite el uso de calculadora. El examen tiene 10 puntos extras en total.

1. Verdadero o Falso

No es necesario que justifique su respuesta. ***Una pregunta mala elimina una buena.*** *Una pregunta sin contestar vale cero puntos. No puede sacar menos de cero en esta parte.*

(1 punto c/u)

1.Si $Z \sim N(0,1)$ entonces $P(-1 < Z < 0) = 0.5$ V **(F)**

FALSO.
S $P(Z < 0) = 0.5$, necesariamente $P(1 < Z < 0) \neq 0.5$. No hace falta buscar en tabla

2.Si $X \sim N(150{,}25)$ entonces $P(145 < X < 155) = 0.9$

V **(F)**

FALSO.
$P(145 < X < 155) = P(-1 < Z < 1) = 0.6826 \neq 0.9$

3.Si X y Y son v.a. independientes, entonces la función de distribución acumulada (f.d.a.) del producto es el producto de las f.d.a. marginales

V **(F)**

FALSO.
Por definición de independencia. Cierto para la f.d.a. de la ***conjunta****. No la f.d.a. del producto.*

4. Si X y Y son v.a.iid entonces $Cov(X,Y)=0$

(V) F

VERDADERO.
Por propiedad fundamental vista en clase. Pero demostrarlo es muy sencillo.
$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)=E(X).E(Y)-E(X).E(Y)=0$.

5. Si $\Gamma \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $T \sim \exp\left(\frac{1}{\Gamma^2}\right)$entonces $E(T) = 2\mu + \sigma^2$

V **(F)**

FALSO.
Ya que las unidades de μ y de σ^2 no se pueden sumar. No hace falta hacer más cuentas.

2. El empresario...

Justifique y simplifique sus respuestas. Dignidad ante la ignorancia: 1 punto.

Un empresario desea montar una cafetería. En dicho local sólo se venderán dos marcas de refrescos: Coca-Cola y Pepsi-Cola. Para ello ha realizado un estudio sobre cuál es la demanda de bebidas de refrescos en la zona donde va a situar el local. Como resultado del estudio se concluye que la demanda conjunta semanal de ambas, tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} kx & \text{si} \quad 0<y<x<2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo X y Y las variables aleatorias que expresan la demanda de Coca-Cola y de Pepsi-Cola en miles de unidades, respectivamente.

1. Determine el valor de k. *(3 puntos)*

$$\iint_R f(x,y)dxdy = 1 \quad => \textit{Despejar "k"}$$

(1) $$\int_0^2 \int_y^2 kx\, dxdy = \int_0^2 k\frac{x^2}{2}\Big|_y^2 dy = \int_0^2 k\left(2-\frac{y^2}{2}\right)dy = k\left(2y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^2 = k\left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}k$$

(2) $$\int_0^2 \int_0^x kx\, dxdy = \int_0^2 kx\, y|_0^x dx = \int_0^2 kx^2\, dx = k\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}k$$

De cualquiera de las dos formas (1) *o* (2) *se tiene que*

$$\frac{8}{3}k = 1 \quad => \boldsymbol{k = \frac{3}{8}} \qquad (Respuesta)$$

2. Si la demanda de Coca-Cola es de 1500 unidades $(X=1.5)$, ¿cuál es la demanda esperada de Pepsi-Cola? *(4 puntos)*

Piden $E(Y|X=1.5)$, *pero* $E(Y|X=X_0) = \int y f_{y|x=x_0} dy$

$$f_{Y|X=x_0}(y) = \frac{f_{XY}(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{kx_0}{kx_0^2} = \frac{1}{x_0} \qquad 0 \le y \le x_0, \quad \textit{cero en otro caso}$$

$$E(Y|X=x_0) = \int_0^{x_0} y\frac{1}{x_0}dy = \frac{1}{x_0}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x_0} = \frac{x_0^2}{2x_0} = \frac{x_0}{2} \quad ; \quad x_0 = 1.5 \quad =>$$

$$E(Y|X=x_0) = \mathbf{0.75} = \mathbf{750}\ \boldsymbol{Unidades} \qquad (Respuesta)$$

3. ¿Qué distribución sigue $Y|X=x$? *(3 puntos)*

$$f_{Y|X=x} = \frac{1}{x} \quad => \boldsymbol{Y|X=x \sim Unif(0,x)} \qquad (Respuesta)$$

3. Labores de rescate...

Justifique y simplifique sus respuestas. Dignidad ante la ignorancia: 1 punto.

Luego de una catástrofe, es necesario el suministro de víveres por vía aérea para labores de rescate. Al lanzar un paquete con víveres, considere que el lugar donde cae el paquete es un vector aleatorio bidimensional (X, Y) distribuido uniformemente en un círculo de radio R, centrado en el blanco.

1. Halle la densidad conjunta de X y Y. *(3 puntos)*

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & si\ \ x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad (Respuesta)$$

2. ¿Son X y Y independientes? Justifique. *(3 puntos)*

No, ya que f_{XY} no factoriza como $g(x).h(y)$. Menos puede ser el producto de las marginales $f_X(x).f_Y(y)$. *(Respuesta)*

Nota: No era necesario calcular las marginales.

$$m_X(x) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\pi R^2} = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, para\ x \in [-R, R];\ cero\ en\ otro\ caso.$$

$$Similarmente, (incluso\ por\ simetria), m_Y(y) = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}.\mathbb{1}\ (y \in [-R, R])$$

3. Sea D la distancia entre el blanco (lugar donde debe caer el paquete) y donde efectivamente cae. Halle la función de densidad de probabilidad de D. *(4 puntos)*

Manera 1 *(Más facil)*

$$F_D(d) = \frac{AreaCirculo\ con\ radio\ (d)}{\pi R^2} = \frac{\pi d^2}{\pi R^2} = \frac{d^2}{R^2} \qquad 0 \leq d \leq R$$

Derivando respecto a d, se obtiene la densidad:

$$\boxed{f_D(d) = \frac{2d}{R^2}\ \ si\ \ 0 \leq d \leq R, \qquad 0\ en\ otro\ caso \qquad (Respuesta)}$$

Manera 2. *Considerando el cambio a coordenadas polares* $T(x,y) \to (D,\theta)$

$$x = D\cos(\theta)\ \ ;\ \ y = D\sin(\theta) \qquad J(D,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial D} & \dfrac{\partial y}{\partial D} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -D\sin(\theta) & D\cos(\theta) \end{vmatrix} = D$$

$$f_{D\theta} = f_{xy}\big(x(D,\theta), y(D,\theta)\big).|J| \qquad con\ \ 0 \leq D \leq R,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \ 0\ en\ otro\ caso$$

$$f_{D\theta} = \frac{D}{\pi R^2} \qquad si \quad 0 \leq D \leq R, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\boxed{f_D(d) = \int_0^{2\pi} \frac{D}{\pi R^2} d\theta = \frac{2\pi D}{\pi R^2} = \frac{2D}{R^2} \quad 0 \leq d \leq R, \qquad 0\ en\ otro\ caso \qquad (Respuesta)}$$

4. Guerra avisada....la tarea!

Justifique y simplifique sus respuestas. Dignidad ante la ignorancia: 1 punto.

1. Demuestre que si X e Y son v.a. exponenciales, independientes, con parámetros μ y λ, respectivamente, entonces la distribución del mínimo es también exponencial y determine su parámetro. *(5 puntos)*

Sea $U = U(X,Y) = \min(X,Y)$

$$P(U > k) = P(X > k, Y > k) = P(X > k) * P(Y > k) = \left(\int_k^\infty \mu e^{-\mu t} dt\right)\left(\int_k^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt\right)$$

$$P(U > k) = e^{-(\mu)k} * e^{-(\lambda)k} = e^{-(\mu+\lambda)k} \quad => \quad \boldsymbol{U \sim \exp(\mu + \lambda)} \qquad (Respuesta)$$

Nota al estudiante: La respuesta $\boldsymbol{U \sim \exp(1/\mu + 1/\lambda)}$ *también es correcta. Las dos posibles respuestas obedecen a la formulación de la densidad exponencial en términos de la media o en términos de la tasa (1/media).*

2. Demuestre la propiedad de pérdida de memoria para la distribución exponencial, es decir, muestre que para cualesquiera enteros positivos a y b,

$$P(X > a + b \mid X > a) = P(X > b) \qquad \textit{(5 puntos)}$$

$$P(X > a + b|X > a) = P(\{X > a + b\} \cap \{X > a\})/P(X > a)$$

Si X>a+b entonces X>a. Por lo tanto $\{X > a + b\} \cap \{X > a\} = \{X > a + b\}$*. Luego,*

$$P(X > a + b|X > a) = \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} = \frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-(\beta a)}} = e^{-\beta b} = P(X > b)$$

$$\boldsymbol{P(X > a + b|X > a) = P(X > b)} \qquad (Respuesta)$$

3. Considere una fuente de poder cuyo tiempo de vida se distribuye exponencial con media 2 años. Si dicha fuente ha funcionado correctamente por 1 año, calcule la probabilidad de que funcione por un año adicional. *(5 puntos)*

$$T \sim \exp(\beta) \quad tal\ que \quad E(T) = 2 \text{ años} \quad => f_T(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \quad t > 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(T > 1 + 1|T > 1) = P(T > 1) = e^{-\frac{1}{2}}} \qquad (Respuesta)}$$

5. Encuesta es importante...y la tarea otra vez!

Justifique y simplifique sus respuestas. Dignidad ante la ignorancia: 1 punto.

A través de una encuesta se quiere estimar la fracción p de adultos de la población que se interesaría en un nuevo producto. Se interroga a n personas de la población, y se estima p como $\hat{p} = \frac{X}{n}$, siendo X el número de personas encuestadas que manifiestan interés en el producto.

1. Utilice la desigualdad de Chebyshev para acotar el tamaño de la muestra, si se quiere que p y $\hat{p}$ difieran en menos de 0.02, con probabilidad mayor que 0.9. *(4 puntos)*

$$P(|\hat{p}-p| > \epsilon) \leq \frac{Var(\hat{p})}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2} \leq 1-0.9 = 0.1$$

Por lo tanto, haciendo $\epsilon = 0.02$ *y despejando n se obtiene*

$$\boldsymbol{n \geq \frac{1}{4(0.02)^2 .0.1} = 6250} \qquad (Respuesta)$$

Nota al estudiante: Sin embargo, el mínimo n que satisface la condición de que $\hat{p}$ *y p difieran en menos de 0.02, con probabilidad mayor que 0.9, tal como se pide, es a lo sumo 6250. En muchos casos, de hecho, el mínimo n que satisface la condición (que en la práctica es lo que se busca) será bastante inferior a 6250 como se verá en la parte 2.*

2. Utilice el T.L.C. para aproximar la misma probabilidad de la parte 1. *(4 puntos)*

$$P(|\hat{p}-p| > \epsilon) \Leftrightarrow P\left(\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) > \frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0.05$$

No se conoce el verdadero p, pero p(1-p) se puede acotar por 1/4. Si se toma p(1-p)=1/4, correspondiente al peor caso (máxima varianza), el n calculado será superior al buscado, y puede servir como un tamaño de muestra "conservador" para la realización de la encuesta.

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right) \cong 0.05 \Leftrightarrow Z_{0.05} = \sqrt{4n}\epsilon \Leftrightarrow \frac{Z_{0.05}^2}{4\epsilon^2} = n$$

En el examen, al buscar por tabla, se obtenía $n \cong \frac{1.65^2}{4(0.02)^2} \cong 1701.56$*. Por lo tanto* $n \geq 1702$ *satisface la condición y se toma el menor valor n=1702.* $(Respuesta)$

Nuevamente, el mínimo_ tamaño de muestra que satisface la condición pedida, es a lo sumo 1702.

Nota al estudiante: Al calcular el cuantil exacto (con métodos numéricos) $n \cong \frac{1.645^2}{4(0.02)^2} \cong 1690.96$*. Si el verdadero p es diferente de 1/2, p(1-p) sería menor que 1/4 y por lo tanto existe un* $n \leq 1691$ *que satisface la condición.*

3. Compare los resultados de las partes 1 y 2. *(2 puntos)*

(Dos líneas máximo)

Es claro ver que ***n (Chebyshev) > n (TLC).*** $(Respuesta)$

Esto se esperaba. La desigualdad de Chebyshev arroja una cota de la probabilidad considerada, mientras el TLC (siempre que se pueda aplicar) es un resultado aproximado mucho más cercano a la verdadera probabilidad. Por lo tanto el n (TLC) es bastante cercano al mínimo n que satisface la condición de que $\hat{p}$ *y p difieran en menos de 0.02, con probabilidad mayor que 0.9, tal como se pide.*

Nota: En toda la pregunta 5, por simplicidad, puede asumir que la población es de tamaño infinito, o equivalentemente, puede considerar que el muestreo se realiza con reemplazo.